1 Sistemi linearnih jednačina

Definicija 1. Pod sistemom od m linearnih jednačina sa n nepoznatih, podrazumevamo skup jednačina S

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Gornjim sistemom na prirodan način su odredjene matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

koji se redom nazivaju matrica sistema, proširena matrica sistema i kolona slobodnih članova.

- ♠ Ako je $m = n$ sistem je kvadratan.
- ♠ Ako je $B = 0$ sistem je homogen.
- ♠ Ako je $B \neq 0$ sistem je nehomogen.
- ♠ Sistem može biti:
  - a) nesaglasan (nerešiv, protivrečan) - ako nema rešenja;
  - b) saglasan (rešiv) - ako ima rešenja; tada postoje dve mogućnosti:
    - ∗ sistem ima tačno jedno rešenje - odredjen sistem;
    - ∗ sistem ima beskonačno mnogo rešenja - neodredjen sistem.

1.1 Gausov metod rešavanja sistema linearnih jednačina

Dva linearna sistema su ekvivalentna ukoliko su im skupovi rešenja jednaki. Polazni sistem se može prevesti u njemu ekvivalentan sistem koji je jednostavniji za rešavanje. Posebno je važno svodjenje na "stepenast"sistem.

Pod elementarnim transformacijama podrazumevaju se:

1) zamena mesta jednačina;

2) množenje neke jednačine skalarom $\lambda \neq 0$;

3) množenje jedne jednačine skalarom $\lambda \neq 0$ i dodavanje drugoj.

1. Koristeći Gausov metod, rešiti sledeće sisteme:

$$a)\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

1.2 Kramerov metod

Teorema 1.1. *Kvadratni sistem je odredjen akko je $detA\ neq0$ i tada je rešenje dato sa*

$$x_k = \frac{detA_k}{detA}, \ \ k = \overline{1, n}$$

gde je A_k matrica koja se dobija kada se k-ta kolona matrice A zameni kolonom slobodnih članova. Sistem je protivrečan akko $detA = 0$, $detA_k \neq 0$ za neko k. Ukoliko je $detA = 0$ i $detA_k = 0$ za svako k, potrebno je još ispitivanja.

1. Odrediti parametar m tako da sistem bude protivrečan:

$$a)\ \begin{aligned} mx + 3y &= 3 \\ x - y &= 7 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 3mx - 4y &= 9 \\ 3x - my &= 1 \end{aligned}$$

2. Diskutovati rešenja sledećeg sistema u zavisnosti od parametra:

$$\begin{aligned} mx + 6y &= 5m - 3 \\ 2x - (m-7)y &= 29 - 7m \end{aligned}$$

3. Diskutovati rešenja sledećeg sistema u zavisnosti od parametra:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ ax + 4y + z &= 5 \\ 6x + (a+2)y + 2z &= 13 \end{aligned}$$

1.3 Homogen sistem

Homogen sistem uvek ima rešenje $(0, 0, \ldots, 0)$ i to je takozvano trivijalno rešenje. Homogen sistem ima netrivijalno rešenje akko je $\det A = 0$.

1. Rešiti sledeće homogene sisteme:

$$a)\ \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - 2y + 2z &= 0 \\ 3x - 3y + 3z &= 0 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

2. Za koju vrednost parametra m sledeći sistem ima netrivijalno rešenje: $\begin{aligned} mx + y + z + t &= 0 \\ x + my + z + t &= 0 \\ x + y + mz + t &= 0 \\ x + y + z + mt &= 0 \end{aligned}$

1.4 Metod Kroneker-Kapeli

Teorema 1.2. *Sistem je saglasan akko je $r(A) = r(\overline{A})$.*

(i) Ako je $r(A) = n$ sistem ima jedinstveno rešenje.

(ii) Ako je $r(A) < n$ sistem je neodredjen, tj. ima beskonačno rešenja.

1. Metodom Kroneker-Kapelija ispitati saglasnost i rešiti sistem jednačina:

$$a)\ \begin{aligned} 3x + y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ 4x - 3y - z &= 3 \\ 2x + 4y + 2z &= 4 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x + 2y - 3z + 4t &= 9 \\ x - z + t &= 1 \\ 3x - y + z &= -1 \\ 3x + y + 3t &= 9 \\ -x + y + 2t &= 9 \end{aligned}$$

2. Odrediti λ tako da sistem ima rešenje i naći to rešenje $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda \end{aligned}$